

## Neuer Beitrag zur ballistischen Theorie der »veränderlichen Sterne«.

Erklärung des Phänomens für die Sterne vom Typus U Geminorum und vom Cluster-Typus. Von *M. La Rosa*.

1. Die Einwände der Herren *Bernheimer*<sup>1)</sup> und *Salet*<sup>2)</sup> gegen meine aus der Anwendung des ballistischen Prinzips auf die Fortpflanzung des Lichtes gewonnene theoretische Skizze des Phänomens der »Veränderlichkeit« haben mich zu einer eingehenden Untersuchung der Eigentümlichkeiten veranlaßt, die diese Skizze uns für den Fall voraussehen läßt, daß die Konstante  $kb$  der Grundgleichung viel größer als 1 wird.

Die Ergebnisse einer solchen Untersuchung sind sehr befriedigend gewesen, weil sie mich zu einer einfachen und unmittelbaren Erklärung des Verhaltens der zwei Gruppen »veränderlicher Sterne« führten, die bis heute in ein dichtes Geheimnis gehüllt geblieben waren.

Die Wichtigkeit einer solchen Übereinstimmung zu betonen, ist überflüssig. Es ist eine neue Gruppe von Tatsachen, die direkt und ungezwungen zu Gunsten der Anwendung des ballistischen Prinzips auf das Licht spricht, einer Anwendung, die sich auf dem Boden der quantistischen Theorien als etwas Leichtes und Natürliches darstellt.

Indem ich mir die Erörterung der Divergenz zwischen dem Veränderlichkeitstypus, der von der ballistischen Theorie vorausgesehen wird, und dem, der (nach *Bernheimer*) beobachtet worden sein soll, für eine spätere Mitteilung vorbehalte, will ich hier nur die Analyse darlegen, die mich zu den angekündigten Ergebnissen geführt hat.

Ich werde ausgehen von der Untersuchung über die Bedingungen des Verschwindens der Gleichung:

$$\chi + a \cos \chi = K$$

worauf die Untersuchung über die Stellungen eines in seiner Bahn umlaufenden Sternes, aus denen das emittierte Licht gleichzeitig bei dem Beobachter ankommt, hinausläuft; eine Untersuchung, die wegen der Anwendungen, die sie finden kann, an und für sich Interesse hat. Anschließend werde ich die Methode darlegen, die man bei Berechnung der Lichtkurven in dem allgemeinsten möglichen Falle (eines beliebigen  $a$ , d. h. der Überlagerung des aus einer beliebigen Anzahl von Stellungen kommenden Lichtes) befolgen kann, und ihre Anwendung auf einen konkreten Fall ( $a = 10\pi$ ) durchführen, was mir Gelegenheit geben wird, die vollkommene Analogie im Verhalten zwischen den für großes  $a$  vorauszuherrschenden Lichtkurven und den Lichtkurven nachzuweisen, die die Beobachtung seit langem für die Veränderlichen vom Typus U Geminorum und die in den Sternhaufen gefundenen Veränderlichen von besonderem Charakter (Cluster-Typus) ergeben hat.

2. Es sei daran erinnert, daß die Grundgleichung meiner Skizze der ballistischen Theorie der veränderlichen Sterne<sup>3)</sup>

$$T = k \tau_0 + t + kb \tau_0 \cos \omega t$$

ist, welche bei Einführung entsprechender Variablen die Form  $y = x + a \cos x$  (1) oder auch  $\theta = u - e \sin u$  (1') annimmt.

In dieser zweiten Form ist sie den Astronomen gut bekannt, ist aber nur in dem Falle untersucht worden, in dem  $e < 1$  ist, weil sie dann den überaus einfachen Zusammenhang darstellt, der bei der Bewegung der Planeten zwischen der Zeit  $\theta$ , der exzentrischen Anomalie  $u$  und der Exzentrizität  $e$  der Bahn besteht.

Es sei weiter daran erinnert, daß die Gleichung (1) graphisch — in orthogonalen kartesischen Koordinaten — zu einer »schiefen Sinusoide« (s. Fig. 1) wird, eingezeichnet

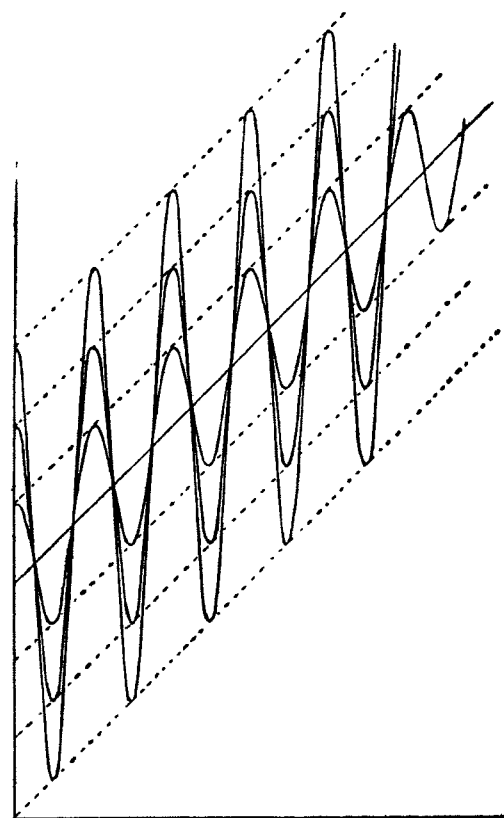


Fig. 1

<sup>1)</sup> Z. f. Phys. 36.302, 1926.      <sup>2)</sup> C. R. 183.1263, 1926.

<sup>3)</sup> Die Zeichen haben folgende Bedeutung:  $t$  = Abgangszeit des Lichtes von dem in seiner Bahn umlaufenden Stern,  $T$  = Ankunftszeit beim Beobachter,  $\tau_0$  = Umlaufzeit des Sternes (in kreisförmiger Bahn),  $\omega = 2\pi/\tau_0$  = Winkelgeschwindigkeit des Sternes,  $b$  = Verhältnis der Tangentialgeschwindigkeit  $v$  des Sternes zu der normalen Lichtgeschwindigkeit  $c$ ,  $k = \Delta/c \tau_0$ , wo  $\Delta$  die Entfernung Stern-Beobachter ist. Der Fall der elliptischen Bahn ist von *C. Cannata* in R. Acc. Lincei behandelt worden.

innerhalb des Streifens, der die Geraden

$$y = x + a \quad y = x - a \quad (2)$$

zu Kanten hat. Diese sind in unendlich vielen Punkten Tangenten zur Kurve, und zwar die obere in den Abszissenpunkten:

$$x = 2n\pi$$

die untere in den Punkten:

$$x = (2n + 1)\pi$$

mit  $n$  als einer beliebigen ganzen Zahl.

Setzt man dann in (1)  $x \pm 2n\pi$  mit ganzem  $n$  an die Stelle von  $x$ , so bekommt man:

$$y(x + 2n\pi) = \pm 2n\pi + y(x). \quad (3)$$

Diese Gleichung besagt uns, daß bei konstanten Amplitudenintervallen  $2\pi$  die Kurve sich identisch reproduziert, wobei nur folgende Änderung stattfindet: der neue Bogen erweist sich in bezug auf den vorausgehenden um eine zur  $y$ -Achse parallele Translation um den konstanten Betrag von  $2\pi$  verschoben.

Dieser Umstand erlaubt uns, uns der für die periodischen Funktionen gebräuchlichen Terminologie zu bedienen, indem wir als Periode den innerhalb eines Amplitudenintervalls  $2\pi$  enthaltenen Kurvenabschnitt, als »Amplitude« den Faktor  $a$  des periodischen Gliedes, als Achse der Kurve die Gerade  $y = x$ , die die Achse des Streifens ist, als Phase im Punkt  $P$  die Differenz<sup>1)</sup>

$$x - 2n\pi$$

bezeichnen, wo  $x$  die Abszisse von  $P$  und  $n$  die Ordnungszahl der Periode ist, zu der der Punkt  $P$  gehört, unter der Annahme, daß man derjenigen Periode, die bei  $x = 0$  beginnt, den Index Null gibt. Mit einem Wort, wir können nach vielen Hinsichten die Gleichung (1) behandeln, als wenn sie eine periodische<sup>2)</sup> wäre. Solange man  $a < 1$  annimmt, ist die Gleichung (1) immer wachsend, da es nicht möglich ist, der Bedingung

$$y' = 1 - a \sin x = 0$$

zu genügen, während das zweite Differential  $y''$  immer  $> 0$  bleibt; sobald dagegen  $a > 1$  ist, zeigt sie unendlich viele Maxima und unendlich viele Minima. Von diesen haben die ersten die Koordinaten:

$$x_{m,n} = \alpha + 2n\pi \quad y_{m,n} = 2n\pi + (\alpha + a \cos \alpha)$$

die anderen:

$$x_{m,n} = (2n + 1)\pi - \alpha \quad y_{m,n} = (2n + 1)\pi - (\alpha + a \cos \alpha)$$

wo  $n$  eine beliebige ganze Zahl (Null einbegriffen) bezeichnet und  $\alpha$  der kleinste Wert von  $x > 0$  ist, der der Gleichung (3) genügt; nämlich

$$\alpha = \arcsin(1/a) \quad (4')$$

da  $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ .

Dies vorausgeschickt, gehen wir daran, zu untersuchen, welches die Zahl der Punkte ist, in denen eine Gerade der Gleichung  $y = K$  die Kurve schneidet, oder genauer, für einen gegebenen Wert von  $a$  zu untersuchen, wie diese Zahl beim Variieren von  $K$  sich ändert.

Dank der oben hervorgehobenen »uneigentlichen Periodizität« von  $y$  ist es klar, daß es genügt, die Untersuchung

auf eine einzige Periode zu beschränken, d. h.  $K$  als veränderlich in einem Amplitudenintervall ( $2\pi$ ) anzunehmen, da die für eine Periode gefundenen Resultate auf die anderen Perioden ausgedehnt werden können. Und zwar wollen wir  $K$  als zwischen  $a$  und  $a + 2\pi$  veränderlich annehmen. Wir heben zunächst hervor, daß die Kanten des Streifens auf der Geraden  $y = K$  ein Segment von konstanter Länge abtrennen, dessen Enden die Abszissen  $K - a$ ,  $K + a$  haben, und daß die gesuchten Punkte — die die Wurzeln der Gleichung  $x + a \cos x = K$  sind — alle auf diesem Segment liegen müssen.

Beginnen wir mit der Annahme, daß  $K = a$  sei, d. h. daß die Gerade die Kurve an der ersten Berührung — Index 0 — mit der oberen Kante schneide. Wenn  $n$  die Zahl der Minima ist, die links vom Ende  $2a$  unseres Segmentes liegen, so können wir behaupten, daß die Zahl der gesuchten Schnittpunkte  $2n + 1$  ist, da jedes Minimum zu zweien solcher Punkte führt, und zwar ohne die erste oben erwähnte Berührung zu zählen, die links von dem ersten Maximum liegt und die deshalb zur Rechten des unmittelbar der Achse  $y$  vorausgehenden Minimums gehört.

Die angenommene Bedingung, daß das Index-Minimum ( $n - 1$ ) das letzte sei, das links von  $2a$  fällt, führt zu der anderen, daß die Ordinate dieses Minimums die letzte ist, die  $\leq a$  ist. Diese wird zur Ungleichheit

$$y_{m,n-1} = (2n - 1)\pi - (\alpha + a \cos \alpha) \leq a$$

oder

$$(2n - 1)\pi \leq a + y_{m,1}.$$

Um uns eine genaue Vorstellung von dem zu machen, was mit der Anzahl der Wurzeln geschieht, wenn wir  $K$ , ausgehend von  $a$ , ständig wachsen lassen, ist es angezeigt, sich die Abstände vor Augen zu halten, die das erste Maximum und das Index-Minimum  $n$  von der Geraden  $y = a$  haben.

Diese Abstände sind

$$\delta = y_{m,1} - a = \alpha + a(\cos \alpha - 1)$$

und

$$\eta = y_{m,n} - a = (2n + 1)\pi - (y_{m,1} + a).$$

Es ist ohne weiteres augenscheinlich, daß wir in dem Falle, wo  $\delta < \eta$  wäre, keinerlei Änderung in der Zahl der Wurzeln  $2n + 1$  beim Wachsen von  $K$  von  $a$  auf  $a + \delta = y_{m,1}$  (mit Einschluß der Extreme) erwarten können, denn während die Gerade bei ihrem allmählichen Ansteigen immer den Kamm des ersten Maximums schneidet, gelingt es ihr noch nicht, das Index-Minimum  $n$  zu berühren. Dagegen müssen wir eine Verminderung dieser Zahl um 2 Einheiten erwarten, wenn  $K$ ,  $y_{m,1}$  überschreitend, das zwischen diesem Wert und dem Werte  $y_{m,n}$  enthaltene Intervall durchläuft.

Ja, es besteht alsdann ein Amplitudenintervall

$$\eta - \delta = y_{m,n} - y_{m,1} = (2n + 1)\pi - 2y_{m,1} > 0$$

innerhalb dessen die Zahl der Wurzeln auf  $2n - 1$  herabgeht, um zu  $2n + 1$  zurückzukehren, sobald  $K$  gleich  $y_{m,n}$  wird. Dieser Wert erhält sich durch den ganzen Rest der Periode, d. h. in dem Intervall ( $y_{m,n} - a + 2\pi$ ), unverändert, da innerhalb des Segmentes  $K - a$ ,  $K + a$  kein Verlust an Maxima noch ein Gewinn an Minima mehr erhalten werden kann.

<sup>1)</sup> Damit die eingeführte Terminologie der für die sinusoidalen Funktionen gebräuchlichen analog sei, müßte man als Phase das Verhältnis  $(x - 2n\pi)/2\pi$  und als Winkelwert der Phase unsere Differenz bezeichnen.

<sup>2)</sup> Aus diesem Grund werden wir sagen, daß die Gleichung (1) eine »uneigentliche periodische« Funktion ist.

Kurz, wenn  $(2n-1)$  die größte ungerade ganze Zahl ist, welche der Bedingung

$$(2n-1)\pi \leq a + y_{M,1}$$

genügt, und wenn wir überdies

$$(2n+1)\pi > 2y_{M,1}$$

haben oder überhaupt

$$(2n-1)\pi \leq a + y_{M,1} < 2y_{M,1} < (2n+1)\pi$$

so variiert die gesuchte Zahl der Wurzeln zwischen  $(2n+1)$  und  $(2n-1)$ . Sie ist  $(2n+1)$  im Intervall  $(a, a+\delta)$ ,  $(2n-1)$  im Intervall  $(a+\delta, a+\eta)$  und wird wieder  $(2n+1)$  in  $(a+\eta, a+\omega)$ . Im Grunde haben wir in jeder Periode zwei Intervalle, in deren einem die Zahl der Wurzeln  $(2n+1)$  ist, und das sich um  $2x-\eta$  links von der Berührung mit dem oberen Rand und um  $\delta$  rechts von derselben erstreckt.

Im besonderen ist in dem Falle, wo

$$(2n-1)\pi = a + y_{M,1}$$

d. h.  $y_{m,n} = a$  ist, die Zahl der Wurzeln  $2n+1$  in dem Intervall  $\delta$  und wird  $2n-1$  in allen übrigen Teilen, weil das neue Minimum nur am Ende der Periode berührt werden wird.

Es bleiben die Fälle zu untersuchen, wo  $\delta > \eta$ .

In dem ersten derselben geschieht es, daß die Gerade  $y=K$  gleichzeitig Tangente zur Kurve in dem 1. Maximum ( $K=y_{M,1}=a+\delta$ ) und in dem Index-Minimum  $n$  wird; die Zahl der Schnittpunkte steigt alsdann von  $(2n+1)$  auf  $(2n+3)$  — indem man die Berührungen als Doppelpunkte zählt — und kehrt sofort auf  $(2n+1)$  zurück, sobald  $K$   $y_{m,n}$  übertrifft. Man hat also im allgemeinen  $2n+1$  Wurzeln, die nur bei  $K=y_{M,1}$  zu  $(2n+3)$  werden.

Im anderen Fall,  $\delta > \eta$ , besteht ein ganzes Amplitudenintervall  $(\delta-\eta) = (y_{M,1} - y_{m,n})$ , in dem die Zahl der Wurzeln von  $(2n+1)$  auf  $(2n+3)$  steigt, um zu  $(2n+1)$  zurückzukehren, sobald  $K$   $y_{M,1}$  übersteigt. Dieser Wert erhält sich offensichtlich bis an das Ende des Intervalls. Kurz, in diesem Falle werden die Dinge folgenden Verlauf nehmen: während  $K$  von  $a$  bis  $y_{m,n}$  variiert — dieses Extrem ausgeschlossen — ist die Zahl der Wurzeln  $2n+1$ , sie wird  $2n+3$ , während  $K$  von  $y_{m,n}$  bis  $y_{M,1}$  variiert — Extreme einbegriffen — und kehrt für den ganzen übrigen Abschnitt der Periode auf  $2n+1$  zurück.

Zusammenfassend: immer angenommen, daß  $(2n-1)$  die größte ungerade ganze Zahl sei, für die man

$$(2n-1)\pi \leq y_{M,1} + a$$

hat, so werden wir bekommen, wenn wir

$$\delta - \eta = y_{M,1} - y_{m,n} = 2y_{M,1} - (2n+1)\pi \geq 0$$

haben, daß die Zahl der Wurzeln zwischen  $(2n+1)$  und  $(2n+3)$  schwankt. Die beiden Bedingungen zusammenfassend ergibt sich, daß dieser Fall eintritt, wenn man hat:

$$(2n-1)\pi < y_{M,1} + a < (2n+1)\pi \leq 2y_{M,1}$$

Abschließend ergibt sich aus der angestellten Analyse, daß es, um die gewünschte Zahl der Wurzeln zu finden, wenn  $a$  gegeben ist, genügt, die Ordinate des 1. Maximums mit Hilfe der Formel

$$y_{M,1} = a + a \cos \alpha = \arcsin [1/a \cdot \sqrt{(a^2 - 1)}]$$

zu berechnen und sich die Zahlen  $(a+y_{M,1})/\pi$  und  $2y_{M,1}/\pi$

zu bilden; alsdann schwankt, wenn unter ihnen eine gewisse ungerade ganze Zahl  $(2n+1)$  enthalten ist, die Zahl der Wurzeln zwischen dieser und der darauffolgenden ungeraden Zahl in der beschriebenen Weise; im entgegengesetzten Falle schwankt die gesuchte Zahl zwischen den zwei folgenden, die berechneten Zahlen umfassenden ganzen Zahlen.

Im besonderen ist in dem Falle, wo  $(a+y_{M,1})/\pi$  selbst eine ungerade ganze Zahl wäre,  $(2n-1)$ , die Zahl der Wurzeln  $2n+1$  in dem Intervall  $(a, y_{M,1})$  und wird  $(2n-1)$  in dem übrigen Teil der Periode; in dem Fall, wo  $2y_{M,1}/\pi$  die ungerade ganze Zahl  $(2n-1)$  wäre, ist die gesuchte Zahl konstant  $(2n-1)$  außer an einem Punkt (bei  $K=y_{M,1}$ ), wo sie  $2n+1$  wird.

3. Wollen wir nun zur wirklichen Berechnung der Wurzeln der Gleichung

$$y = x + a \cos x = K \tag{6}$$

schreiten, wo  $K$  eine zwischen  $a$  und  $a+2\pi$  enthaltene Zahl ist, so können wir uns sehr vorteilhaft der durch die Beziehung (3) ausgedrückten Eigenschaft bedienen, die uns erlaubt, die Untersuchung auf diejenige nach den Schnittpunkten gewisser zur Achse  $x$  parallelen Geraden immer nur mit der ersten Periode<sup>1)</sup> der Kurve  $y(x)$  zu beschränken.

Der größeren Klarheit wegen nehmen wir diese Wurzeln als bekannt und in wachsender Reihenfolge angeordnet an. Sie seien:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n+1}$$

Wir bemerken, daß von ihnen die ersten drei oder die 1. allein der 1. Periode der Kurve angehören, und zwar je nachdem  $K \leq y_{M,1}$  oder  $K > y_{M,1}$  ist, und daß die folgenden zu zwei und zwei zu den darauffolgenden Perioden gehören.

Angenommen also, daß die zwei Wurzeln  $x_4$  und  $x_5$  der 2. Periode angehören, so werden wir schreiben

$$x_4 = 2\pi + x_{4,0} \quad x_5 = 2\pi + x_{5,0}$$

Die Gleichung (3) besagt uns aber, daß

$$y(x_4) = 2\pi + y(x_{4,0})$$

ist, woraus man, da  $y(x_4) = K$  ist, bekommt:

$$y(x_{4,0}) = K - 2\pi$$

und ebenso:

$$y(x_{5,0}) = K - 2\pi$$

Letztere besagen uns, daß es, um die zwei Wurzeln  $x_4$  und  $x_5$  zu finden, genügt, die Gleichungsgerade  $y = K - 2\pi$  zu ziehen und ihre Schnittpunkte mit der ersten Periode der Kurve zu suchen. Wir erhalten so im Grunde die Winkelwerte der Phasen  $x_{4,0}$ ,  $x_{5,0}$ , mit deren Hilfe man unmittelbar die zwei gesuchten Werte bekommt, indem man einfach die Zahl  $2\pi$  hinzu addiert.

Auf vollkommen analoge Weise finden wir, daß es, um die Wurzeln  $x_6$ ,  $x_7$  zu erhalten, genügt, die Gerade  $y = K - 2 \cdot 2\pi$  zu ziehen, die Abszissen der Schnittpunkte  $x_{6,0}$ ,  $x_{7,0}$  nur mit der ersten Periode der Kurve zu suchen und zu ihnen die Zahl  $2 \cdot 2\pi$  hinzuzufügen usw.

Kurz, wir werden alle verlangten Wurzeln erhalten, indem wir die Schnittpunkte der ersten Periode der Kurve mit den Gleichungsgraden:

<sup>1)</sup> Es ist nötig, diese erste Periode der Kurves, von der wir hier sprechen, und die erste Periode der Funktion  $y(x)$  scharf auseinander zu halten. Erstere umfaßt in der Tat sämtliche Punkte, deren  $x$  zwischen 0 und  $2\pi$  fällt, während letztere sämtliche Punkte umfaßt, deren  $y$  zwischen  $a$  und  $a+2\pi$  fällt, und Punkte haben kann, deren  $x$  zu dem Intervall  $0 < (2n+1)\pi$  gehören.

$$\begin{aligned}
 y &= K \\
 y &= K - 2\pi \\
 y &= K - 2 \cdot 2\pi \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 y &= K - n \cdot 2\pi
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

suchen und zu den so gefundenen Phasen die entsprechenden Multiplen von  $2\pi$  hinzufügen, die in dem zweiten Glied von (7) vorkommen.

Nachdem die Untersuchung so formuliert ist, ist es zur Auffindung der gewünschten Phasen am besten, sich Tafeln zu konstruieren, in denen die Werte von  $y$  für angenommene Werte der  $x$  für das Intervall  $(0, 2\pi)$  eingetragen sind.

Praktisch ist die Konstruktion solcher Tafeln nicht schwierig, weil es genügt, eine gewöhnliche trigonometrische Tafel zu nehmen, die Werte des Kosinus — von  $30'$  zu  $30'$  — mit der Konstante  $a$  zu multiplizieren und den des Bogens, ausgedrückt in Teilen des Radius, hinzuzufügen. Ja, im Hinblick auf die Verwendung unserer Funktion für astronomische Zwecke kann die Herstellung einer gewissen Anzahl von Hilfstabellen nützlich sein, die die Produkte der Werte der Funktion  $\cos x$  mit den aufeinander folgenden natürlichen Zahlen von 1–9 enthalten, derart daß man bei ihrer Verwendung leicht das Produkt  $a \cos x$  für jeden beliebigen gegebenen Wert von  $a$  berechnen und somit die Tafel der

$$y = x + a \cos x$$

für den gewünschten Wert von  $a$  bilden kann<sup>1)</sup>.

4. Übergehend zur Berechnung der von der ballistischen Theorie der »Veränderlichen« vorausgesehenen Lichtkurven ziehen wir es vor, ein konkretes Beispiel zu wählen, das uns nicht nur Gelegenheit gibt zu zeigen, wie im Konkreten die dargelegten Betrachtungen angewandt werden, sondern auch ein Mißverständnis zu beseitigen, in das ich selbst hinsichtlich der Wahl der oberen Grenze, dem das Produkt  $k\dot{b}$  unterworfen sein müßte, damit das Phänomen der Veränderlichkeit noch wahrnehmbar sei, verfallen bin. Wir wollen also absichtlich den Fall wählen, in dem  $a = 10$  und daher  $k\dot{b}$  jenen Wert hat, der in meinen früheren Arbeiten auf Grund intuitiver Betrachtungen als die Grenze betrachtet worden war, bei dem die Veränderlichkeit verschwinden würde.

Die Beziehung zwischen Beobachtungszeit und Abgangszeit der Strahlen des Sternes:

$$T = k\tau_0 + t + k\dot{b}\tau_0 \cos \omega t$$

wird in dem angenommenen Fall:

$$y = x + 31.41592 \cos x$$

wo  $y = \omega(T - k\tau_0)$   $x = \omega t$ .

Das erste Maximum von  $y$  hat also statt bei dem durch

$$\alpha = \arcsin(1/10\pi) = 1^\circ 49' 26''.7$$

gegebenen Wert von  $x$ , und der Wert der Ordinate  $y_{M,1}$  ist 31.43205.

Die Zahlen  $(a + y_{M,1})/\pi$  und  $2y_{M,1}/\pi$  haben infolgedessen die Werte 20.0054 und 20.0108, welche uns, da sie beide zwischen 19 und 21 enthalten sind, besagen, daß die Zahl der

distinkten Stellungen des Sternes, von denen aus gleichzeitig Strahlen zu dem Beobachter gelangen, sich zwischen 19 und 21 bewegt.

Das von dem Beobachter gesehene Gesamtbild wird also gebildet werden durch die Überlagerung dieser 19 oder 21 Elementarbilder (da die Entfernung zwischen Stern und Beobachter und der Radius der Umlaufbahn die Trennung dieser Bilder nicht gestatten), und es wird eine Helligkeit haben gleich der Summe der Helligkeiten der Elementarbilder.

Will man die Lichtkurve nach Punkten konstruieren, so wird man also auf folgende Weise verfahren müssen:

Es wird auf geeignete Weise eine gewisse Anzahl von Werten von  $T$  (Beobachtungszeit), d. h. von  $y$  bestimmt; diese seien  $y_0, y_1, y_2 \dots y_i$ .

Entsprechend zu jedem derselben z. B. zu  $y_1$  usw. werden die Werte  $x_1$  usw. gesucht, die die Gleichung

$$x + a \cos x = y_i$$

erfüllen, oder besser die entsprechenden Phasen mit Hilfe der Gleichungen  $x + a \cos x = y_i - m \cdot 2\pi$ , was mit Hilfe der vorbereiteten Tafel und auf die bereits angegebene Weise geschieht. Es seien  $x_{i0}, x_{i1}, x_{i2} \dots x_{i, 2n+1}$  die 21 (oder 19) so gefundenen Zahlen.

Man berechnet alsdann entsprechend einer jeden dieser Phasen den absoluten Wert der Derivierten  $dy/dx$ , da diese, indem sie mit  $dT/dt$  zusammenfällt, in jedem Punkt einen Wert annimmt, der umgekehrt proportional zur Helligkeit des Teilbildes ist und uns also für die Messung derselben dienen kann.

Nimmt man also die umgekehrten Werte der 21 Zahlen  $y'(x_{ij})$  und addiert sie, so erhält man eine Zahl, die proportional zur scheinbaren Helligkeit des im Augenblick  $T_i$  beobachteten Bildes ist und gegeben wird durch

$$T(T_i - k\tau_0) = y_i$$

Die etwas mühseligen Berechnungen sind von meinem Assistenten Dr. G. Petrucci ausgeführt worden, dem ich dafür meinen Dank und mein Lob ausspreche.

Nachstehend führe ich einige Beispiele an:

Nimmt man als ersten Wert  $y_0$  von  $y$ , die Amplitude  $a$  selbst = 31.41592... und denkt man sich daher von dem ersten Berührungspunkt der Kurve mit der oberen Kante des Streifens eine Parallele zur Achse  $x$  gezogen, so bekommt man als Phasen der Schnittpunkte derselben mit der Kurve folgende Zahlen:

	$x$	$J$	$x$	$J$	$x$	$J$
1. Periode	0° 0' 0"	1	3° 38' 0"	1.0526	325° 24' 0"	0.0529
2. »	—	—	38 51	0.0540	310 59	0.0400
3. »	—	—	55 19 50	0.0402	295 45	0.0342
4. »	—	—	68 48	0.0353	284 1	0.0318
5. »	—	—	81 3 30	0.0333	272 46	0.0209
6. »	—	—	92 57 30	0.0331	261 38 45	0.0311
7. »	—	—	104 58 45	0.0339	250 10	0.0328
8. »	—	—	117 43	0.0372	357 51 15	0.0134
9. »	—	—	132 20	0.0450	223 37	0.0442
10. »	—	—	152 12 30	0.0733	204 0	0.0762

<sup>1)</sup> Es ist offensichtlich, daß, wenn die erste zu drei Schnittpunkten führt, die letzte keinen geben können, wenn die Zahl der Wurzeln  $2n + 1$  ist.

Nachdem diese gefunden waren, ergaben sich die absoluten Werte von  $1/y'$ , die in der beigelegten Tabelle in den mit  $J$  bezeichneten Spalten (partielle Lichtintensitäten) zusammengestellt sind; schließlich wurde die im Augenblick  $T_0 = k\tau_0 + kb\tau_0$  (den wir als Ausgangspunkt der Zeiten  $T$  nehmen werden) beobachtete totale Helligkeit berechnet. In dem angeführten Fall sieht man, daß diese Summe den Wert **2.84** hat. Mit anderen Worten, in diesem Augenblick  $T = T_0$  wird der Stern, infolge der angenommenen ballistischen Fortpflanzung des Lichtes, dem Beobachter mit einer **2.84**mal so großen Helligkeit erscheinen, als er hätte zeigen müssen, wenn sich das Licht mit konstanter Geschwindigkeit fortpflanzte, oder wenn der Stern nicht eine Bahn beschriebe.

Es ist noch sehr wichtig, darauf aufmerksam zu machen, daß zur Bildung dieser Gesamthelligkeit die 21 partiellen Bilder in sehr verschiedenem Maße beitragen.

In weit überwiegendem Maße tragen dazu bei die zwei ersten der drei zur 1. Periode gehörigen Bilder; und zwar das erste mit dem Wert 1, das andere mit dem Wert 1.0526, während die übrigen 19 Bilder dazu untereinander wenig verschiedene Beiträge von der Größe einiger Hundertstel liefern, sodaß, während die zwei ersten für sich allein zur Helligkeit des Gesamtbildes einen Beitrag von 2.05 liefern, die übrigen 19 zusammengenommen nicht einen Beitrag von 0.8 erreichen!!

Auf dieselbe Weise sind die Helligkeiten berechnet worden, die sich dem Beobachter zu den in der ersten Spalte der folgenden Tabelle angegebenen Zeiten bieten. Diese Zeiten sind, ausgehend von dem oben angegebenen Augenblick  $T_0$ , bestimmt und in Bruchteilen der Periode (d. h. bei Annahme von  $\tau_0 = 1$ ) ausgedrückt.

	$J$		$J$
0.000000	2.8411	0.487500	2.1113
0.004838	Max.	0.49490	Max.
0.013888	1.0035	0.51388	1.48744
0.027776	0.7845	0.52776	1.28407
0.035552	0.7842	0.666717	0.97692
0.083333	0.7802	0.83333	0.98390
0.250000	0.7656	0.97222	1.28424
0.472222	0.7794	0.98610	1.48110
0.486060	0.7818	1.00000	2.84110

Das beschriebene Verfahren stößt auf eine ernsthafte Schwierigkeit, wenn es auf die Auswertung der den Maxima der Lichtkurve entsprechenden Helligkeit angewandt wird (d. h. wenn als Werte von  $K$  die Ordinaten des 1. Maximums und des letzten links von  $2a$  liegenden Minimums gewählt werden).

In der Tat wird, da alsdann unter den  $x$ , die Abszisse des Maximums (oder des Minimums) figurirt, eines der  $y'$  null, was mit sich bringt, daß man dem entsprechenden Elementarbild eine unendliche Helligkeit zuschreiben müßte. Es würde in diesem Falle viel zweckmäßiger erscheinen, die Helligkeit dieses »Einzelbildes« von dem außerhalb der Grenzgröße genommenen Wert des Verhältnisses  $\Delta y/\Delta x$  abzuleiten. Aber auch die Zahlen, die auf diesem Wege erhalten werden, hängen stark von dem besonderen Wert ab, den man dem (willkürlichen)  $\Delta x$  beimißt, sodaß es in Ermangelung

eines Kriteriums für die Wahl von  $\Delta x$  nicht möglich ist, sich auf einen von denen, die man berechnen kann, zu verlassen.

Man muß also, um die Werte der Maxima abzuleiten, anders verfahren.

Es ist ohne weiteres evident, daß das beste Kriterium folgendes ist: Graphisch die Kurve auf Grund der bereits gefundenen Punkte zu zeichnen (d. h. sie ohne die Maxima zu ziehen) und letztere auf ihr festzulegen, indem man bedenkt, daß das Gesamtareal zwischen der Kurve, der Achse der  $x$  und den äußersten Ordinaten gleich sein muß dem Rechteck, das die Periode und die effektive Helligkeit 1 des Sternes zu Seiten hat. Dies, weil die zwei Areale respektive die Gesamtlichtmengen darstellen, die in einer Periode zu dem Beobachter bei der ballistischen und bei der gewöhnlichen Hypothese gelangen müssen und die aus evidenten energetischen Erfordernissen (1. Prinzip) dieselben sein müssen.

Bei Anwendung dieses Kriteriums auf den fraglichen konkreten Fall haben wir als Werte für die zwei gesuchten Maxima die Zahlen 4.06 und 4.92 erhalten.

Kurz, trotz des der Konstante  $a$  gegebenen verhältnismäßig großen Wertes (10) führt uns die ballistische Hypothese dahin, eine Lichtkurve vorzusehen, die nicht nur noch sehr deutlich das Phänomen der Veränderlichkeit aufweist, sondern die Eigenschaften besitzt, die das besagte Phänomen in vielen beobachteten Fällen aufweist.

Die vorausgesehene Lichtkurve zeigt in der Tat zwei sehr ausgeprägte, äußerst brüske und sehr kurzdauernde Maxima in der Phase des Aufstieges, die durch zwei sehr flache Minima getrennt sind, in denen die Helligkeit lange Zeit hindurch fast konstant bleibt. Die Amplitude der Helligkeitsänderung in dem berechneten Beispiel ist von der Größenordnung zweier Stufen in der Skala der Sterngrößen, und ihre Phasen sind praktisch folgendermaßen verteilt:

Zwei lange Intervalle, in denen die Helligkeit merklich vermindert ist mit den Werten, die sie in den zwei Minima hat (0.78 bzw. 0.92), die im ganzen 60/100 der Periode umfassen; die beiden Phasen der Abnahme, die 20/100 umfassen, die der langsamen Zunahme auf 15/100 und die beiden Maxima, die sich fast ganz in den übrigen 5/100 der Periode entwickeln, obwohl sich der größte Teil des Aufstieges zum Maximum und des Abstieges in einer äußerst kurzen Zeit vollzieht.

Die nämlichen Resultate werden gefunden, wenn der Konstante  $a$  viel größere Werte beigelegt werden, wie ich durch eine orientierende Berechnung für den Fall  $a = 200\tau$  habe feststellen können. Alles, was in der Lichtkurve verzeichnet wird, ist eine geringere Dauer der Maxima und eine dementsprechende Steigerung ihrer Helligkeit. Wir können also schließen, daß keine obere Grenze für die Konstante  $a$  (und somit für  $kb$ ) besteht, über die hinaus das Phänomen der Veränderlichkeit sich nicht mehr zeigt. Der Zwiespalt zwischen den Folgerungen aus der ballistischen Theorie und den von *Bernheimer* und *Salet* angeführten Beobachtungen ist also nicht wesentlich und beschränkt sich auf eine Divergenz in der Form der Lichtkurve, die leicht ausgeschaltet werden kann.

Die Eigenschaften, mit denen der von der ballistischen Theorie für diese großen Werte von  $a$  vorausgesehene Lichtwechsel auftritt, decken sich in der Tat nicht mit denjenigen der Veränderlichen vom *Algo Typus*, folgen vielmehr sehr

nahe denjenigen, die bei den Veränderlichen der 3. Gruppe, der Klasse IV der *Pickering'schen* Klassifikation, d. h. der als »Cluster-Typ« bezeichneten Gruppe (welche die zahlreichste von allen ist) und den langperiodischen Veränderlichen der Klasse IIB derselben Klassifikation beobachtet worden sind<sup>1)</sup>.

Aus einer Abhandlung von *S. I. Bailey*<sup>2)</sup> bringen wir in den Abbildungen 2, 3, 4 einige Lichtkurven von zu jenem Typus gehörigen Sternen und auch die folgende Tabelle,

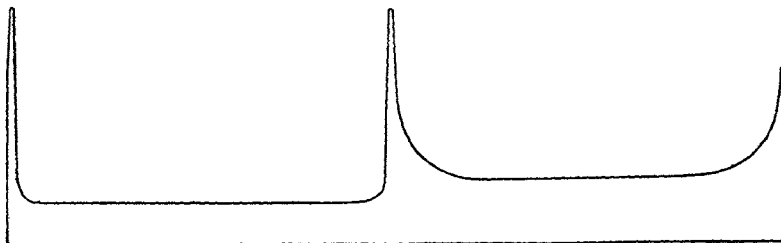


Fig. 2



Fig. 3

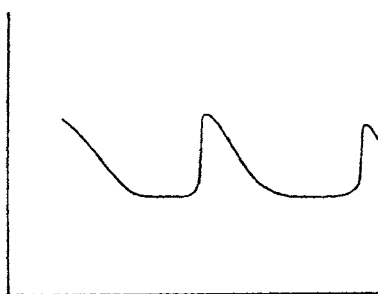


Fig. 4

Diese Tabelle und jene Lichtkurven zeigen deutlich den Parallelismus des Verhaltens zwischen diesen Fällen der Beobachtung und der theoretisch abgeleiteten Kurve.

Analoge Eigenschaften besitzt die bei SS Cygni (Fig. 3) (dem typischsten und seltsamsten der Veränderlichen der

in der die bei dem Phänomen der Veränderlichkeit bei einigen Sternen in den Sternhaufen M<sub>5</sub> beobachteten hervorstechendsten Phasen schematisch dargestellt sind.

Dauer des Maximums	0/100
» » Minimums	40/100
» » Abstiegs	50/100
» » Anstiegs	10/100
	100/100

Klasse IIB von *Pickering*) beobachtete Lichtkurve, die ebenfalls zwei lange Intervalle der Lichtkonstanz (Minimum), zwei fast augenblicklich aufflammende Maxima usw. aufweist. Es muß auch noch weiter bedacht werden, daß die ballistische Theorie über gute Reserven verfügt, um die von einem jeden der Veränderlichen dieser wichtigen und geheimnisvollen Gruppe, die bis heute jedwedem Erklärungsversuch entgangen ist, dargebotenen Erscheinungen näher erklären zu können, und zwar indem sie sich dazu bedient: 1. der auf die passendste Weise getroffenen Wahl der Konstante *a*; 2. der Elliptizität der Bahn (die wir hier der Einfachheit halber als kreisförmig angenommen haben); 3. der Orientierung derselben in bezug auf die Gesichtslinie usw. Es erscheint als möglich, auf diesem Wege die verschiedene Dauer der beiden Maxima, die verschiedene Schnelligkeit der beiden Abstiege usw. zu erklären.

Palermo, Physikalisches Institut der Kgl. Universität.

*M. La Rosa.*

<sup>1)</sup> Vergleiche *K. Schiller*, Einführung in das Studium der veränd. Sterne, A. Barth, Leipzig, 1923.

<sup>2)</sup> ApJ 10.260 (1899).

### Concerning the fictitious radiants of meteoric streams. By *V. A. Maltzev*.

One of the essential tasks of meteoric astronomy consists in determining the radiants of the streams of shooting stars. In order of greater precision the Meteor Section of the American Astronomical Society and the American Meteor Society have established certain rules for the deduction of radiants<sup>1)</sup> which emphasise the necessity of determining radiants on the ground of observations carried out during one night (or two successive nights at the utmost). Besides the American Meteor Society the Meteor Section of the Russian Amateur Society for the Study of the Univers<sup>2)</sup> and, apparently, the Meteor Section of the British Astronomical Association also follow (in essential) the same rules in determining radiants.

The introduction of these rules has considerably abated the possibility of deducing fictitious radiants. Nevertheless, to quote *Ch. P. Olivier*, the author of the rules himself, a confidence therefore is felt that at least one half of these 1200 radiants (deduced by *Ch. P. Olivier* on the ground of observations carried out by the American Meteor Society *V. M.*)

represent one or more appearances of real Streams, and the writer will feel amply rewarded if the future proves this estimate not to be too high<sup>3)</sup>.

In working over observations carried out by the members of the Russian Amateur Society for the Study of the Univers for the period 1924-1927 with the purpose of arranging a catalogue of radiants, we were struck by the necessity of further restricting the rules established by the American Meteor Society in order to lower the percentage of fictitious radiants.

In dealing with this question we have consciously left without consideration the personal error of the observer which usually manifests itself in a more or less considerable turning of the meteor until it coincides with the great-circle, passing through the radiant, which was either previously known or was established in the course of observations. Unfortunately this »personal error« which doubtlessly exists in the observations of the most experienced observers, can hardly be estimated with precision. Considering the restrictions with regard to

<sup>1)</sup> Pop. Astr. 26.18, 1918; Publ. of the Leander Mc Cormick Observatory, vol. II, part 7, 221-222, (1921).

<sup>2)</sup> Astr. Bull. Mirovédenié, N 7-22 (1924-28).

<sup>3)</sup> *Ch. P. Olivier*. Meteors, p. 90, Baltimore (1925).